**RICHIAMI DI TEORIA DEGLI INSIEMI** *27-02-25*

Un **insieme** è una collezione di oggetti *,* detti *elementi* di A.

Due insiemi importanti sono:

* L’insieme vuoto , che non contiene alcun oggetto.
* Lo spazio campione , che contiene tutti gli oggetti.

E’ possibile indicare un insieme indicando tutti i suoi elementi:

oppure, se presente, indicando la proprietà che accomuna tutti gli elementi dell’insieme:

**SOTTOINSIEME**

Diremo che un insieme è un **sottoinsieme** dell’insieme , e lo indicheremo con ,   
se ogni elemento di è anche elemento di .

Ogni insieme è un sottoinsieme dello spazio campione . Se è costituito da un numero finito dielementi, allora il numero di possibili sottoinsiemi di è pari a .

Immagine che contiene schermata, diagramma, cerchio, design

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Come si può notare dalla figura sopra, vale la proprietà transitiva:

,

Diremo che due insiemi e sono *identici*, e lo indicheremo con , se e .

**UNIONE E INTERSEZIONE**

L’**unione**  di due insiemi e è l’insieme costituito dagli elementi che appartengono ad , a   
o a entrambi.

L’ **intersezione**  di due insiemi e è l’insieme costituito dagli elementi che appartengono   
sia ad che a .

**Immagine che contiene diagramma, linea, cerchio, schizzo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.**

Come si può notare dalla figura sopra, l’unione di due insiemi e contiene sempre la loro intersezione:

Diremo che due insiemi e sono *disgiunti* se .

**COMPLEMENTARE**

L’**insieme complementare** di un insieme è l’insieme costituito da tutti gli elementi   
dello spazio campione che non appartengono ad .

Immagine che contiene schermata, cerchio, surfing, design

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

**PARTIZIONE**

La **partizione** di un insieme è una collezione di sottoinsiemi disgiunti di non vuoti tali che   
la loro unione è l’insieme stesso.

Immagine che contiene schermata, diagramma, cerchio, design

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

**PROPRIETA’ DELL’ALGEBRA DEGLI INSIEMI**

Valgono le seguenti proprietà:

|  |  |
| --- | --- |
| **Leggi di idempotenza** | |
|  |  |
| **Leggi associative** | |
|  |  |
| **Leggi commutative** | |
|  |  |
| **Leggi distributive** | |
|  |  |
| **Leggi di identità** | |
|  |  |
|  |  |
| **Leggi di complementarietà** | |
|  |  |
|  |  |
| **Leggi di De Morgan** | |
|  |  |

**TEORIA DELLA PROBABILITA’**

Un fenomeno si definisce *probabilistico* se vi è incertezza riguardo il suo comportamento.   
La **teoria della probabilità** ha lo scopo di fornire un modello matematico per la descrizione   
dei fenomeni probabilistici, permettendo di gestire la loro incertezza.

Chiamiamo:

* **Esperimento casuale:** procedimento di osservazione dello stato finale del fenomeno interessato. L’esperimento deve essere ripetibile un numero indefinito di volte   
  con le stesse modalità di esecuzione;
* **Risultato:** lo stato finale del fenomeno a seguito dell’esecuzione dell’esperimento;
* **Spazio campione :** l’insieme di tutti i possibili risultati;
* **Evento:** un sottoinsieme di (e cioè, un insieme di risultati);
* **Evento elementare:** un elemento di (e cioè, un singolo risultato);
* **Evento certo:** ;
* **Evento impossibile**: ;
* **Prova:** una singola esecuzione dell’esperimento, da cui si otterrà un singolo risultato .   
  Data una prova da cui si ottiene un risultato *,* diremo che in questa prova si è verificato   
  l’evento se .

**PROBABILITA’**

Con **probabilità**  di un evento indicheremo una valutazione quantitativa della possibilità   
che si verifichi. Dal punto di vista matematico:

Dove:

* Valori di prossimi allo 0 indicano una bassa possibilità che si verifichi;
* Valori di prossimi a 1 indicano un’alta possibilità che si verifichi.

**DEFINIZIONE CLASSICA DELLA PROBABILITA’**

Nell’ipotesi che i risultati siano tutti equiprobabili, indicando con:

* : il numero di elementi di **;**
* : il numero di elementi di *favorevoli* all’evento , e cioè i risultati che appartengono ad   
  (e quindi, che verificherebbero tale evento).

La definizione classica di è la seguente:

Analizziamo ora i vantaggi e gli svantaggi di questa definizione:

* Vantaggi:
  + Non occorre effettuare esperimenti per calcolare la probabilità di un evento;
* Svantaggi:
  + Non definisce la probabilità nei casi in cui i risultati non sono tutti equiprobabili.

**DEFINIZIONE FREQUENTISTA DELLA PROBABILITA’**

Supponendo di ripetere un esperimento un certo numero di volte, indicando con:

* : il numero di prove;
* : il numero di volte in cui si è verificato l’evento .

Si definisce frequenza relativa dell’evento :

Detto ciò, la definizione frequentista di è la seguente:

Dal punto di vista pratico, effettuare il limite per di significa valutare su un numero opportunamente elevato di prove.

Analizziamo ora i vantaggi e gli svantaggi di questa definizione:

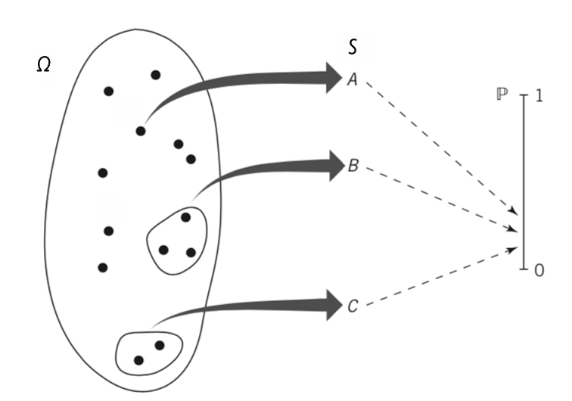
* Vantaggi:
  + Definisce la probabilità anche nei casi in cui i risultati non sono tutti equiprobabili;
* Svantaggi:
  + Dal punto di vista matematico, il limite per di non si può   
    calcolare analiticamente;
  + Dal punto di vista pratico, non sempre è possibile effettuare un numero opportunamente elevato di prove.

**DEFINIZIONE ASSIOMATICA DELLA PROBABILITA’**

La definizione assiomatica della probabilità non dà una definizione diretta di , ma accetta   
un qualunque approccio, purché questo rispetti degli assiomi fondamentali.

Per ogni esperimento casuale viene definito lo **spazio di probabilità ,** e cioè una terna costituita da:

* Lo spazio campione ;
* Un’opportuna classe di eventi ;
* Una funzione di probabilità che associa ad ogni evento di la sua probabilità.



deve rispettare i seguenti assiomi:

1. **NORMALIZZAZIONE**
2. **NON NEGATIVITA’**
3. **ADDITIVITA’:** se e sono due eventi disgiunti, allora:

Quando per un esperimento casuale si usa una certa funzione di probabilità si dice   
che si adotta un certo *modello di probabilità*. Si può verificareche la definizione di probabilità classica e la definizione di probabilità frequentista soddisfano entrambe gli assiomi, pertanto rappresentano due possibili scelte di .

Da questi assiomi si ricavano alcuni teoremi:

1. **PROPRIETA’ 1**

Da cui discende:

1. **PROPRIETA’ 2**
2. **PROPRIETA’ 3:** dati due eventi e , se allora:
3. **PROPRIETA’ 4:** siano degli eventi che costituiscono una partizione di . Allora:
4. **PROPRIETA’ 5:** se e sono due eventi non disgiunti, allora:

*Es.* data una produzione in serie di condensatori:

* Probabilità che la capacità sia entro i limiti di tolleranza = 0.96;
* Probabilità che la tensione di isolamento superi un certo valore minimo = 0.97;
* Probabilità che almeno una delle condizioni sia soddisfatta = 0.98.

Calcolare la probabilità di estrarre un condensatore che non soddisfi il requisito sulla capacità   
o quello sulla tensione di isolamento

Definiamo gli eventi:

A noi interessa calcolare :

Per la proprietà 1,

Calcoliamo:

Per la proprietà 5,

;

Sostituendo allora il valore di nell’espressione di :

Se è un insieme finito costituito da elementi:

* viene scelta come tutti i sottoinsiemi di *;*
* viene scelta in modo che la probabilità di ogni singolo evento elementare   
  soddisfi i tre assiomi.

Fatto ciò, dato un generico evento costituito da elementi, sarà data da:

sono tra loro disgiunti, dunque,   
per l’assioma 3,

Un possibile modello di probabilità è il modello *uniforme* di probabilità, in cui ogni risultato   
è considerato equiprobabile, dunque:

In questo caso, allora, sarà data da:

Che coincide con la definizione classica della probabilità.

Il modello uniforme di probabilità viene tipicamente adottato per esperimenti in cui c’è   
una situazione di simmetria (*es.* nel gioco dei dadi, del lotto, delle carte…).

*Es.* sia dato un mazzo di 52 carte non truccato. Estraendo una carta, qual è la probabilità   
di ottenere un asso non di cuori?

Definiamo gli eventi:

Il mazzo è non truccato, dunque posso applicare il modello uniforme di probabilità.   
 e , dunque:

**PROBABILITÀ CONDIZIONATA**

Dati due eventi e , chiamiamo la probabilità di dato , e cioè la probabilità   
che si verifichi noto che si è verificato l’evento .

Approssimo i limiti considerando

Definizione frequentista della probabilità

è definita in questo modo:

è dunque una nuova funzione di probabilità, e si può verificare che rispetta gli assiomi.  
Dandole un’interpretazione frequentista, supponendo di ripetere l’esperimento volte:

E cioè, si può approssimare con la frequenza dell’evento nelle prove   
in cui si è verificato .

Valgono le seguenti proprietà:

1. Se e sono due eventi disgiunti, allora:
2. Dati due eventi e , se , allora:
3. Dati due eventi e , se , allora:

**TEOREMA DI PROBABILITA’ TOTALE**

Siano degli eventi che costituiscono una partizione di , e sia un evento:

Immagine che contiene diagramma, cerchio, schermata

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Allora:

*Es.* per la produzione di un certo componente vengono impiegate tre catene di produzione distinte   
, che contribuiscono rispettivamente con il 45%, col 30% e col 25%   
alla produzione totale. Dal collaudo a cui è sottoposta la produzione si ha che l’8% della produzione   
di è difettosa, e così il 6% della produzione di e il 5% di quella di .   
Estraendo in modo casuale un componente, quale è la probabilità che esso sia difettoso?

Definiamo gli eventi e le probabilità:

A noi interessa calcolare . , e sono eventi che costituiscono una partizione di ,   
dunque, per il teorema della probabilità totale:

**TEOREMA DI BAYES**

Siano e due eventi. Allora:

*Es.* riferendoci all’esempio precedente, quale è la probabilità che, una volta estratto   
un componente difettoso, esso sia stato prodotto dalla catena di produzione ?

Definiamo gli eventi e le probabilità:

A noi interessa calcolare . Applicando il teorema di Bayes:

**EVENTI INDIPENDENTI**

Due eventi e si dicono **indipendenti** se il verificarsi dell’uno non influenza il verificarsi dell’altro,   
e quindi se (una delle seguenti definizioni):

Dandole un’interpretazione frequentista, supponendo di ripetere l’esperimento volte:

* Usando la prima definizione:

Dalla definizione frequentista della   
probabilità condizionata, .

Dalla definizione frequentista della probabilità, , approssimando il limite considerando

E cioè, la frequenza di nelle prove in cui si è verificato si può approssimare   
con la frequenza di nelle prove dell’esperimento.

* Usando la seconda definizione:

Dalla definizione frequentista della   
probabilità condizionata, .

Dalla definizione frequentista della probabilità, , approssimando il limite considerando

E cioè, la frequenza di nelle prove in cui si è verificato si può approssimare   
con la frequenza di nelle prove dell’esperimento.

*Es.*un esperimento aleatorio consiste nell’estrazione di una carta da un mazzo regolare   
composto di 52 carte. Definiamo i seguenti eventi:

1. Verificare se gli eventi e sono indipendenti;
2. Verificare se gli eventi e sono indipendenti;
3. Calcolare .

Il mazzo è regolare, dunque posso applicare il modello uniforme di probabilità.

1. Usando la terza definizione di eventi indipendenti, dobbiamo verificare che:

Calcoliamo le varie probabilità:

Ci sono 3 figure per ciascuno dei 4 semi

Ci sono 3 figure per il seme di cuori

Le carte di cuori sono 13

Abbiamo quindi:

L’equazione è verificata, dunque gli eventi e sono indipendenti.

1. Usando la terza definizione di eventi indipendenti, dobbiamo verificare che:

Calcoliamo le varie probabilità:

Le carte nere sono le 13 carte di fiori e le 13 carte di picche

Non ci sono carte di cuori nere

Abbiamo quindi:

L’equazione non è verificata, dunque gli eventi e non sono indipendenti.

1. Dalla definizione di probabilità condizionata:

Calcoliamo le varie probabilità:

Le figure nere sono le 3 figure di fiori e le 3 figure di picche

Abbiamo quindi:

**RICHIAMI DI CALCOLO COMBINATORIO**

**PRINCIPIO FONDAMENTALE DEL CALCOLO COMBINATORIO**

Se una procedura è composta dapassi, ciascuno dei quali può essere svolto in modi diversi,  
allora il numero di modi in cui la procedura può essere realizzata è:

*Es.* si vuole creare una targa di un’automobile costituita da 2 lettere e 3 cifre, di cui la prima   
diversa da 0. La procedura per creare la targa è dunque la seguente:

1. Scegliere la prima lettera: 26 modi diversi;
2. Scegliere la seconda lettera: 26 modi diversi;
3. Scegliere la prima cifra in modo che sia diversa da 0: 9 modi diversi;
4. Scegliere la seconda cifra: 10 modi diversi;
5. Scegliere la terza cifra: 10 modi diversi.

Il numero di modi in cui si può creare la targa è dunque:

**DISPOSIZIONI SEMPLICI**

Una **disposizione semplice di oggetti presi a**  è una sequenza *ordinata* di oggetti   
scelti tra gli dati.

Il numero di disposizioni semplici di oggetti presi a è:

*Es.* il numero di disposizioni semplici delle 3 cifre 4, 5, 6 prese 2 a 2 è:

Queste disposizioni semplici sono 45, 46, 54, 56, 64 e 65.

**PERMUTAZIONI SEMPLICI**

Una **permutazione semplice di oggetti** è una disposizione semplice in cui .

Il numero di permutazioni semplici è:

*Es.* il numero di permutazioni semplici delle 3 cifre 4, 5, 6 è:

Queste permutazioni semplici sono 456, 465, 546, 564, 645 e 654.

**COMBINAZIONI SEMPLICI**

Una **combinazione semplice di oggetti presi a**  è una sequenza *non* *ordinata* di oggetti   
scelti tra gli dati.

Il numero di combinazioni semplici di oggetti presi a è:

Divido il numero di disposizioni semplici di oggetti presi a   
per il numero di permutazioni semplici di oggetti, così da considerare una sola sequenza per ogni possibile scelta non ordinata di oggetti.

*Es.* il numero di combinazioni semplici delle 3 cifre 4, 5, 6 prese 2 a 2 è:

Queste combinazioni semplici sono 45, 46 e 56.

**ESPERIMENTO COMPOSTO**

Dati due esperimenti caratterizzati rispettivamente dagli spazi campione e ,   
da eventi del tipo e e dalle funzioni di probabilità e , è possibile definire   
**l’esperimento composto dai due esperimenti** come l’esperimento costituito da entrambi   
gli esperimenti. Questo esperimento, dunque, avrà:

* Come spazio campione, ;
* Come eventi, tutti i sottoinsiemi di del tipo ;
* Come funzione di probabilità, una certa funzione di probabilità .

In generale, note le funzioni di probabilità e degli esperimenti componenti,   
non è possibile ricavare la funzione di probabilità dell’esperimento composto.   
Un’eccezione si ha nel caso in cui gli esperimenti componenti fossero *indipendenti*, e cioè se il risultato di ciascun esperimento non influenza il risultato dell’altro. A tal proposito, si può osservare che:

* Eventi del tipo e sono indipendenti.

Da tutte queste osservazioni si può ricavare inoltre (fidati) che:

*Es.* quale è la probabilità che, lanciando due dadi perfettamente simmetrici, entrambi presentino   
o la faccia 4 o la faccia 5?

Possiamo considerare l’esperimento come composto da due esperimenti indipendenti   
di lancio del dado. Inoltre, poiché i dadi sono perfettamente simmetrici, per ciascuno   
dei due esperimenti posso applicare il modello uniforme di probabilità.

A questo punto, calcoliamo la probabilità che entrambi i dadi presentino   
o la faccia 4 o la faccia 5:

Ogni faccia di ciascun dado ha probabilità di presentarsi

Gli esperimenti componenti sono indipendenti, dunque   
e

e sono due eventi disgiunti, dunque, per l’assioma 3,

Un altro modo per risolvere questo esercizio è considerare l’esperimento come un unico esperimento di lancio di due dadi. Inoltre, poiché i dadi sono perfettamente simmetrici, posso applicare   
il modello uniforme di probabilità.

Lanciando i due dadi si hanno:

* 6 modi diversi di ottenere la faccia del primo dado;
* 6 modi diversi di ottenere la faccia del secondo dado.

Il numero di possibili risultati che si ottengono lanciando i due dadi è dunque .

I risultati favorevoli sono 2: che entrambi i dadi presentano la faccia 4 o che entrambi   
presentano la faccia 5.

La probabilità che entrambi i dadi presentino o la faccia 4 o la faccia 5 è dunque:

*Es.* un apparecchio è formato da due componenti identici collegati in serie, per ognuno dei quali   
si sa che la probabilità di guastarsi entro 1000 ore di funzionamento è 0.1. Si suppone che i guasti   
dei due componenti si verifichino in modo indipendente. L’apparecchio è guasto se almeno uno   
dei due componenti è guasto.

Quale è la probabilità che l’apparecchio si guasti entro 1000 ore?

Possiamo considerare l’esperimento come composto da due esperimenti indipendenti   
di funzionamento di componente entro 1000 ore.

Definiamo gli eventi e le probabilità:

* Esperimento di funzionamento del componente 1:
* Esperimento di funzionamento del componente 2:
* Esperimento di funzionamento dell’apparecchio complessivo:

A noi interessa calcolare :

I due esperimenti componenti sono indipendenti, dunque:

* Eventi del tipo e sono indipendenti, dunque, per la terza definizione di eventi indipendenti,

I due esperimenti componenti sono indipendenti, dunque:



Gli eventi e non sono disgiunti, in quanto l’evento   
appartiene ad entrambi. Allora, per la proprietà 5:

Un altro modo per risolvere questo esercizio è considerare in aggiunta il seguente evento:

A questo punto, , e quindi possiamo calcolare in questo modo:

I due esperimenti componenti sono indipendenti, dunque

ES DISSALATORE (COMPONENTI IN PARALLELO)

**PROVE RIPETUTE BINARIE E INDIPENDENTI** *13-03-25*

Consideriamo un esperimento con uno spazio campione costituito da due soli elementi, con e . Consideriamo poi l’esperimento composto costituito   
da esperimenti indipendenti di questo tipo.

La probabilità è data dalla cosiddetta formula di Bernoulli:

*Es.* in un’urna sono contenute biglie di identiche caratteristiche geometriche e meccaniche,   
di cui sono bianche e le rimanenti sono di diverso colore. Si estrae per 5 volte una biglia,   
rimettendola ogni volta nell’urna prima dell’estrazione successiva. Quale è la probabilità di ottenere, nelle 5 estrazioni, 3 volte una biglia bianca e 2 volte una biglia di diverso colore?

Definiamo gli eventi:

Le biglie sono di identiche caratteristiche geometriche e meccaniche, dunque posso applicare   
il modello uniforme di probabilità:

Le biglie bianche sono *b,*

Le biglie totali sono *M*.

Considerando ogni esperimento di estrazione di una biglia come caratterizzato da uno spazio campione costituito dai due soli risultati , poiché ogni volta che si estrae una biglia   
la si rimette nell’urna prima dell’estrazione successiva, possiamo considerare   
l’esperimento di estrazione di 5 biglie come 5 prove ripetute binarie e indipendenti di estrazione   
di una biglia. sarà allora:

Applico la formula di Bernoulli

*Es.* un codice a ripetizione di ordine consiste nel trasmettere, per ogni bit di informazione,   
una parola costituita da volte tale bit:

* 0 ==> 000…00
* 1 ==> 111…11



Ogni parola verrà poi decodificata attraverso una decodifica a maggioranza (e cioè, il bit   
maggiormente presente nella parola sarà quello in cui tale parola verrà decodificata). In questo modo   
è possibile correggere fino a errori in ogni parola trasmessa.

Qual è la probabilità di errore su una parola in presenza di una probabilità di errore sul bit ?

Definiamo gli eventi:

Considerando ogni esperimento di trasmissione di un bit come caratterizzato   
da uno spazio campione costituito dai due soli risultati , poiché ogni trasmissione di un bit   
è indipendente dall’altra, possiamo considerare l’esperimento di trasmissione di una parola   
come prove ripetute binarie e indipendenti di trasmissione di un bit. L’errore su una parola si ha   
se si verifica almeno volte, per cui sarà:

Gli eventi , sono disgiunti   
(*es.* sarà costituito da tutti i risultati dell’esperimento composto   
in cui si verifica 3 volte negli esperimenti componenti, mentre   
 sarà costituito da tutti i risultati dell’esperimento composto   
in cui si verifica 4 volte negli esperimenti componenti. I due eventi, dunque,   
non avranno alcun risultato in comune).

Allora, per l’assioma 3:

Applico la formula di Bernoulli

*Es.* si supponga di lanciare un dado non truccato 5 volte.

1. Qual è la probabilità che si presenti 2 volte la faccia 3?
2. Qual è la probabilità che si presenti almeno 2 volte la faccia 3?

Definiamo gli eventi:

Il dado è non truccato, dunque posso applicare il modello uniforme di probabilità:

La faccia 3 è una sola*,*

Le facce totali sono *6*.

Considerando ogni esperimento di lancio di un dado come caratterizzato da uno spazio campione costituito dai due soli risultati , poiché ogni lancio di un dado è indipendente dall’altro,   
possiamo considerare l’esperimento di lancio di un dado 5 volte come 5 prove ripetute binarie   
e indipendenti di lancio di un dado.

1. Ci interessa calcolare :

Applico la formula di Bernoulli

1. Ci interessa calcolare :

Per la proprietà 1:

Applico la formula di Bernoulli

e sono eventi disgiunti (vedi spiegazione esercizio precedente).

Applico allora l’assioma 3.

*Es.* un contenitore ha un fondo quadrato di lato , al centro del quale è praticato un foro circolare di diametro . Sul fondo del contenitore vengono depositate, a caso e in modo indipendente, 10 palline di piccolo diametro (e cioè, di diametro molto minore di ).Calcolare la probabilità che, alla fine della successione di questi eventi, nel contenitore siano rimaste esattamente 7 palline.

Definiamo gli eventi:

Ogni pallina è di piccolo diametro e viene depositata a caso nel contenitore, per cui possiamo considerare come il rapporto tra l’area del foro e l’area del fondo:

Applico la proprietà 1

, dunque, sarà:

Considerando ogni esperimento di deposito di una pallina nel contenitore come caratterizzato   
da uno spazio campione costituito dai due soli risultati , poiché ogni deposito di una pallina   
nel contenitore è indipendente dall’altro, possiamo considerare l’esperimento di deposito di 10 palline nel contenitore come 10 prove ripetute binarie e indipendenti di deposito di una pallina nel contenitore.

Ci interessa calcolare :

Applico la formula di Bernoulli

**ESPERIMENTI NON INDIPENDENTI**

Due esperimenti sono **non indipendenti** se il risultato dell’uno influenza il risultato dell’altro.

Noi considereremo esperimenti non indipendenti in cui l’esecuzione del primo esperimento   
modifica lo spazio campione del secondo esperimento. In questi casi, se bisogna considerare l’esperimento composto costituito dai due esperimenti dipendenti,   
non lavoreremo direttamente con lo spazio campione dell’esperimento composto,   
ma lavoreremo con lo spazio campione e le probabilità del primo esperimento,   
e considereremo gli effetti sullo spazio campione e sulle probabilità del secondo esperimento   
a partire dalle probabilità condizionate noto che si è verificato un certo evento nel primo esperimento.

*Es.* Si calcoli la probabilità che estraendo due carte da un mazzo non truccato di 40,   
entrambe risultino di fiori.

Possiamo considerare l’esperimento come composto da due esperimenti di estrazione di una carta. Dopo la prima estrazione, la carta estratta non viene reinserita nel mazzo, per cui lo spazio campione del secondo esperimento verrà modificato dal risultato del primo esperimento.   
I due esperimenti, dunque, sono non indipendenti.

Definiamo gli eventi e le probabilità:



Il mazzo è non truccato, dunque posso applicare il modello uniforme di probabilità:

Nella seconda estrazione, noto che nella prima si è ottenuta una carta di fiori:

* Le carte di fiori sono 9;
* Le carte totali sono 39.

Nella prima estrazione:

* Le carte di fiori sono 10;
* Le carte totali sono 40.

A noi interessa calcolare :

Dalla definizione di probabilità condizionata,

*Es.* in un canale di comunicazione binario:

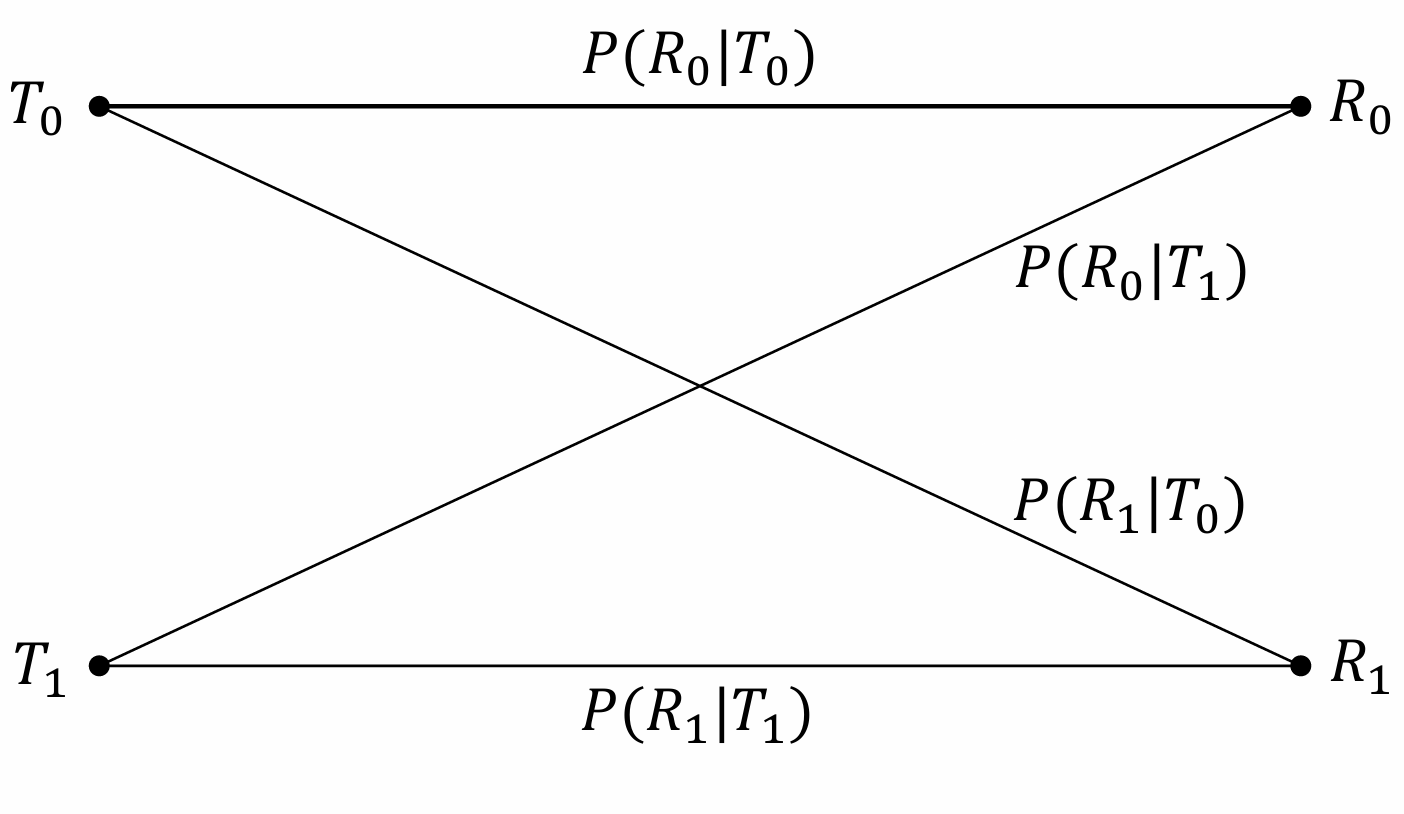
* 1 è trasmesso con probabilità , 0 con probabilità ;
* La probabilità di errore, indipendentemente dal simbolo trasmesso, è .

Si supponga che sia stato ricevuto : qual è la probabilità che sia stato trasmesso effettivamente ?

Possiamo considerare l’esperimento come composto da un esperimento di trasmissione di un simbolo e un esperimento di ricezione di un simbolo. Poiché il simbolo che si riceve dipende dal simbolo   
che si trasmette, i due esperimenti sono non indipendenti.

Definiamo gli eventi e le probabilità:

Possiamo modellare la comunicazione sul canale attraverso le seguenti probabilità condizionate:



* e sono le probabilità di aver ricevuto un certo simbolo   
  noto che è stato trasmesso il simbolo opposto. Corrispondono allora alle probabilità di errore,   
  e quindi ;
* e sono le probabilità di aver ricevuto un certo simbolo   
  noto che è stato trasmesso proprio tale simbolo. Corrispondono allora alle probabilità   
  di trasmissione corretta, e quindi .

A noi interessa calcolare . Applicando la formula di Bayes:

Calcoliamo . e costituiscono una partizione dello spazio campione   
dell’esperimento composto, per cui, applicando il teorema di probabilità totale:

Sostituendo allora in :

Cosa succede se ?

Riprendendo i valori delle probabilità condizionate che modellano la comunicazione sul canale:

* ;

Riprendendo allora l’espressione di :

Riprendendo infine l’espressione di

Cosa succede se ?

Riprendendo i valori delle probabilità condizionate che modellano la comunicazione sul canale:

* ;

Riprendendo allora l’espressione di :

Riprendendo infine l’espressione di

Per la prima definizione di eventi indipendenti, allora, gli eventi e sono indipendenti.

*Es.* in un’urna U e in un’urna V sono contenute 3 biglie, di cui 2 bianche e una nera.   
Pesco una biglia a caso dall’urna U e la metto nell’urna V. Pesco poi una biglia dall’urna V.

1. Qual è la probabilità che la biglia pescata dall’urna V sia bianca?
2. Se la biglia pescata dall’urna V è bianca, qual è la probabilità di aver pescato una biglia nera dall’urna U?

Possiamo considerare l’esperimento come composto da un esperimento di estrazione di una biglia dall’urna U e un esperimento di estrazione di una biglia dall’urna V. La biglia estratta dall’urna U   
viene messa nell’urna V, per cui lo spazio campione del secondo esperimento verrà modificato   
dal risultato del primo esperimento. I due esperimenti, dunque sono non indipendenti.

Definiamo gli eventi:

* ;

1. A noi interessa .

e costituiscono una partizione dello spazio campione dell’esperimento composto, per cui, per il teorema della probabilità totale:

Calcoliamo le varie probabilità. Assumendo che le biglie siano di identiche caratteristiche geometriche e meccaniche, posso applicare il modello uniforme di probabilità:

Nell’urna U:

* Le biglie bianche sono 2;
* Le biglie totali sono 3.

Nell’urna V, noto di aver estratto una biglia bianca dall’urna U:

* Le biglie bianche sono 3;
* Le biglie totali sono 4.

Nell’urna U:

* Le biglie nere sono 1;
* Le biglie totali sono 3.

Nell’urna V, noto di aver estratto una biglia nera dall’urna U:

* Le biglie nere sono 2;
* Le biglie totali sono 4.

Sostituendo allora in :

1. A noi interessa Dal teorema di Bayes:

**VARIABILI ALEATORIE**

Dato un esperimento caratterizzato da uno spazio campione , una classe di eventi   
e una funzione di probabilità , una **variabile aleatoria** è una corrispondenza   
che associa a ciascun risultato dell’esperimento uno e un solo numero reale.

Sfruttando le variabili aleatorie, possiamo indicare gli eventi in questo modo:

Chiamiamo **funzione di distribuzione di probabilità della variabile aleatoria**  la funzione:

Alcune proprietà di sono le seguenti:

1. è monotona non decrescente, dunque:

1. è continua da destra, per cui, se ha un salto nel punto , il suo valore in coincide con il suo limite destro in :

**VARIABILI ALEATORIE DISCRETE**

Una variabile aleatoria si dice **discreta** se assume un numero finito o un’infinità numerabile   
di valori distinti.

Sia una variabile aleatoria discreta che assume solo i valori discreti { }.   
Chiamiamo **funzione di massa di probabilità di** la funzione:

, dunque, può assumere un valore diverso da 0 solo per

Alcune proprietà di sono le seguenti:

Vediamo alcune variabili aleatorie discrete notevoli:

* **Variabile aleatoria di Bernoulli**

Una **variabile aleatoria di Bernoulli**, che indicheremo con , ,   
è una variabile aleatoria tale che:

Immagine che contiene linea, diagramma, Parallelo, Diagramma

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Questa variabile si può usare quando si ha un esperimento con uno spazio campione costituito da due soli elementi, con e . In questo caso, possiamo definire una variabile aleatoria tale che:

A questo punto:

* + sarà la probabilità che l’evento si verifichi;
  + sarà la probabilità che l’evento si verifichi.
* **Variabile aleatoria binomiale**

Una **variabile aleatoria binomiale**, che indicheremo con , e ,   
è una variabile aleatoria tale che:

Immagine che contiene testo, linea, Diagramma, diagramma

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Questa variabile si può usare quando si hanno prove ripetute binarie e indipendenti   
di un esperimento in cui un certo evento , che chiameremo *evento favorevole*,   
è caratterizzato da . In questo caso, possiamo definire una variabile aleatoria   
tale che:

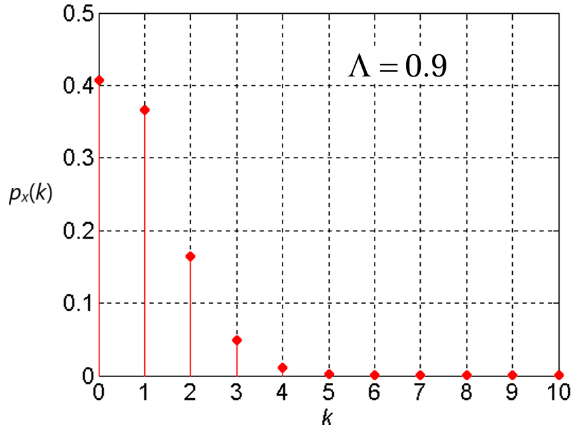
A questo punto, sarà la probabilità che si verifichi volte in un ordine qualsiasi.

* **Variabile aleatoria di Poisson**

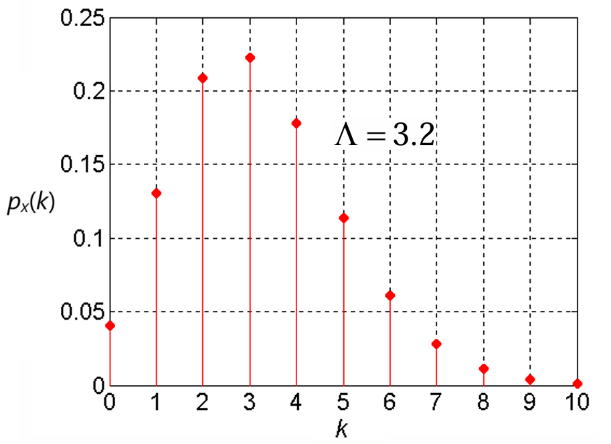
Una **variabile aleatoria di Poisson,** che indicheremo con **𝑋 ∈** , ,  
è una variabile aleatoria tale che:

Al variare di , varia il massimo di :

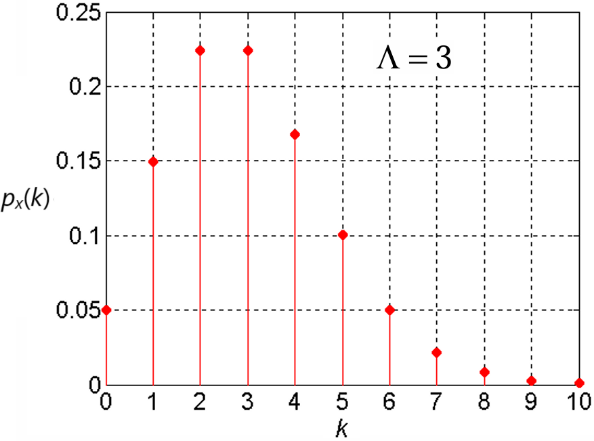
* + Se , allora è massima in :



* + Se e non è intero, allora è massima in :



* + Se ed è intero, allora è massima in e :



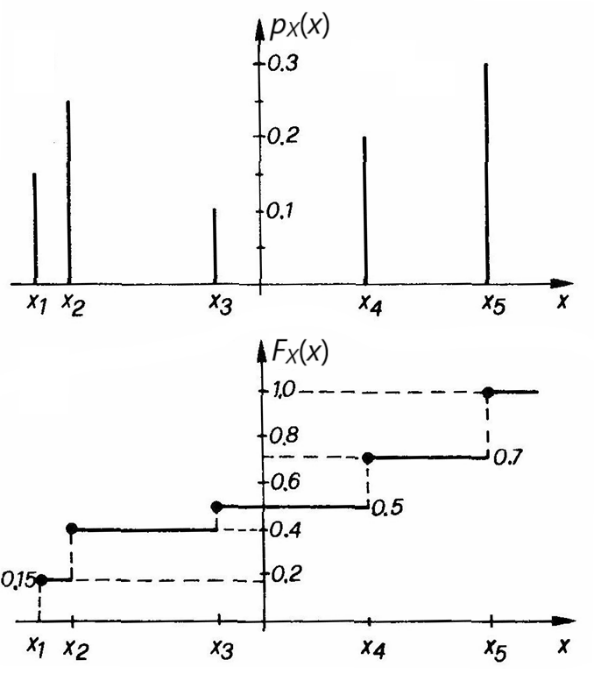
*Es.* supponiamo di studiare una sostanza radioattiva a vita media molto lunga.   
Il numero di decadimenti al secondo è schematizzabile come una variabile aleatoria di Poisson   
di parametro = 0.5 decadimenti al secondo. Calcolare la probabilità che l’intervallo di tempo intercorrente fra due decadimenti successivi superi un secondo.

Il numero di decadimenti per unità di tempo è schematizzabile come una variabile aleatoria   
di Poisson di parametro = 0.5 decadimenti al secondo, per cui sarà:

A noi interessa calcolare la probabilità che l’intervallo di tempo intercorrente fra due decadimenti successivi superi un secondo, e quindi la probabilità che in un secondo ci siano decadimenti.  
Ci interessa dunque calcolare :

Data una variabile aleatoria discreta , il legame tra e è il seguente:

, dunque, sarà una funzione costante a tratti, dove ogni salto sarà in corrispondenza   
di un distinto e sarà alto . E’ possibile dunque ricavare facilmente nota , e viceversa:



**VARIABILI ALEATORIE CONTINUE**

Una variabile aleatoria si dice **continua** se assume un’infinità non numerabile di valori distinti.

Sia una variabile aleatoria continua. Valgono le seguenti proprietà:

1. è continua, dunque:

Allora, dalla proprietà di :

Se è derivabile, chiamiamo **funzione di** **densità di probabilità di** la funzione:

Alcune proprietà di sono le seguenti:

Vediamo alcune variabili aleatorie continue notevoli:

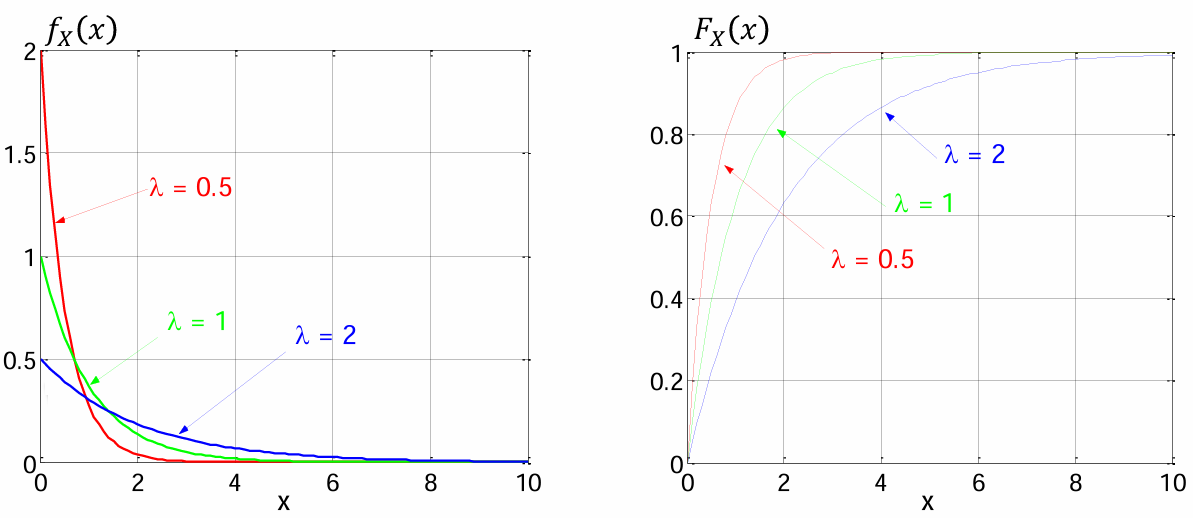
* **Variabile aleatoria uniforme**

Una **variabile aleatoria uniforme,** che indicheremo con **𝑋 ∈** , è una variabile aleatoria tale che:

**

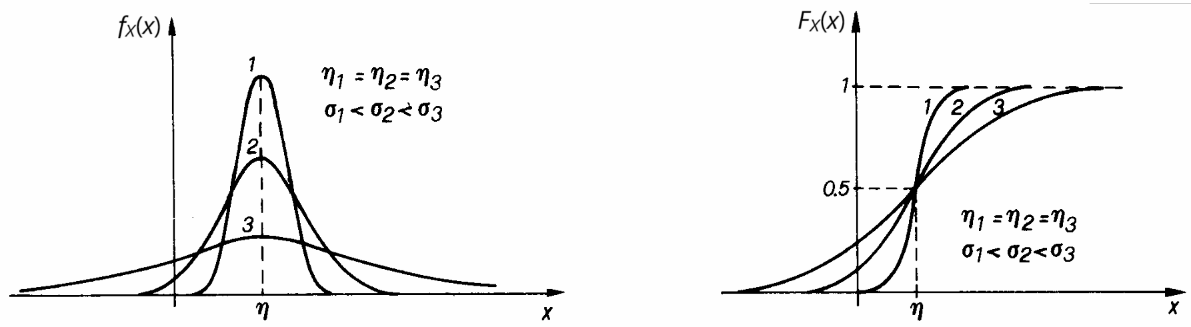
* **Variabile aleatoria esponenziale**

Una **variabile aleatoria esponenziale,** che indicheremo con **𝑋 ∈** ,   
è una variabile aleatoria tale che:



* **Variabile aleatoria Gaussiana (o normale)**

Una **variabile aleatoria Gaussiana (o normale),** che indicheremo con **𝑋 ∈ ,**  ,   
è una variabile aleatoria tale che:



Chiamiamo  **variabile aleatoria Gaussiana (o normale) standard:**

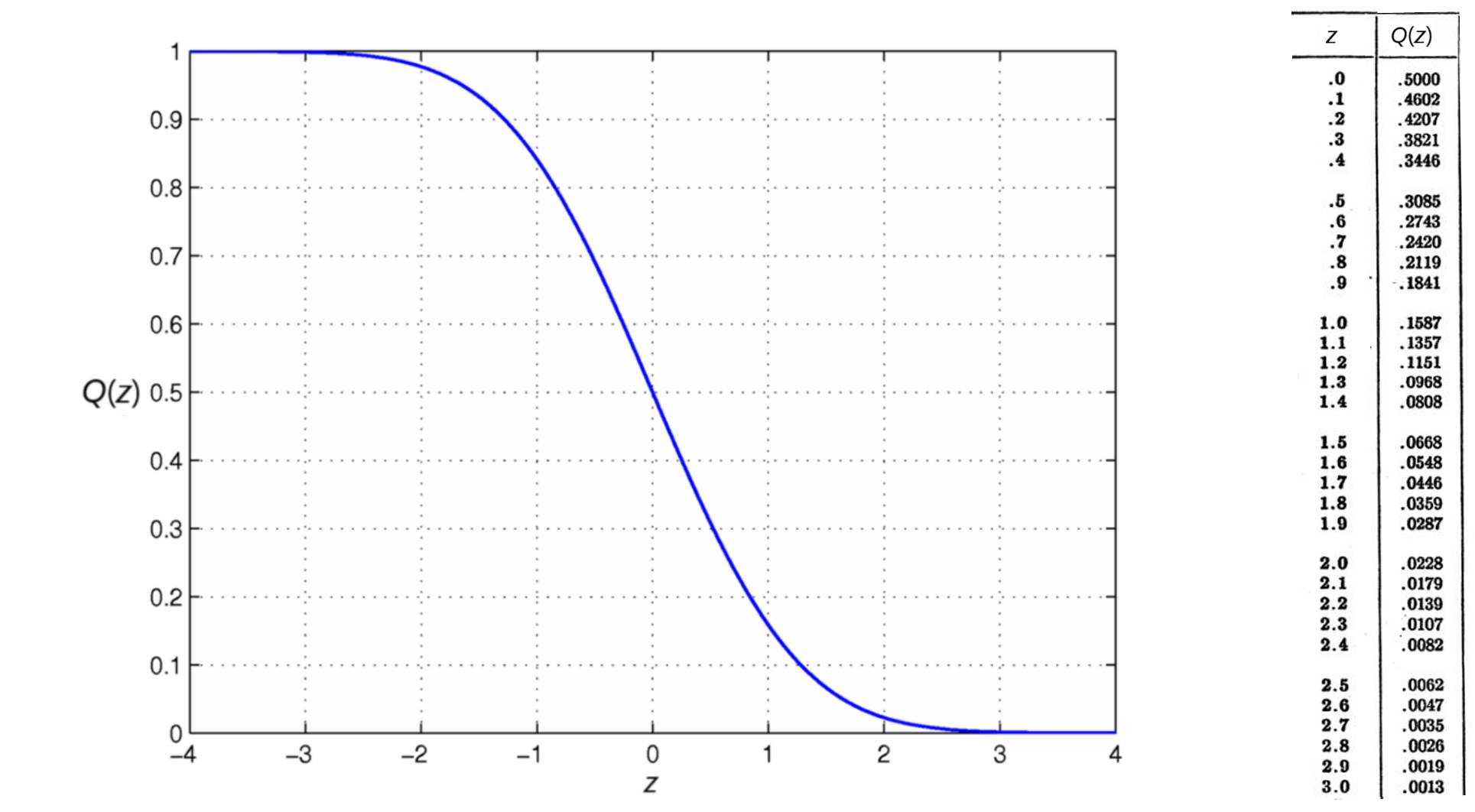
Chiamiamo la **densità di probabilità di :**

Questo integrale non si può risolvere analiticamente.

Chiamiamo la seguente funzione:

e per le proprietà di :

Questa funzione si trova tabulata per :



Per valori di si può sfruttare la seguente proprietà:

A questo punto, data una variabile aleatoria Gaussiana generica 𝑋 ∈ ,   
è possibile calcolare in questo modo:

Inoltre, applicando la proprietà 1:

*Es.* si consideri la variabile aleatoria esponenziale di parametro . Sia .

1. Determinare il valore di , indicando la relativa unità di misura;
2. Calcolare l’istante tale che .

è una variabile aleatoria esponenziale di parametro , per cui sarà fatta in questo modo:

1. Per definizione, . ha unità di misura (visto che, in ,   
    viene confrontato con dei ), dunque anche deve avere unità di misura .

Inoltre, in , deve essere adimensionale, per cui, poichéha unità di misura ,   
anche deve avere unità di misura .

Scriviamo in funzione di e ricaviamo :

Per definizione,

Calcolo

Per la proprietà 1,

, dunque:

Isolo

Faccio il di entrambi i membri

Otteniamo quindi la seguente :

1. Vogliamo calcolare per quale valore di si ha che :

Sostituisco , e poiché , sicuramente , e quindi

Faccio il di entrambi i membri

Isolo

Isolo

;

*Es.* si ha una produzione di resistori con resistenza .

Se è una variabile aleatoria Gaussiana di parametri e , qual è la frazione   
di resistori con ?

A noi interessa :

è una variabile aleatoria Gaussiana di parametri e ,   
dunque

Applico la proprietà di

Guardando i valori tabulati di ,

Applico la proprietà

*Es.* una variabile aleatoria ha una densità di probabilità del tipo:

1. Determinare la costante in modo che sia effettivamente una densità di probabilità;
2. Determinare ;
3. Calcolare .
4. Affinché sia effettivamente una densità di probabilità, possiamo imporre   
   che sia rispettata la proprietà di e ricavare :

Isolo

e

Otteniamo quindi la seguente :

1. Calcoliamo :

Applico la proprietà di

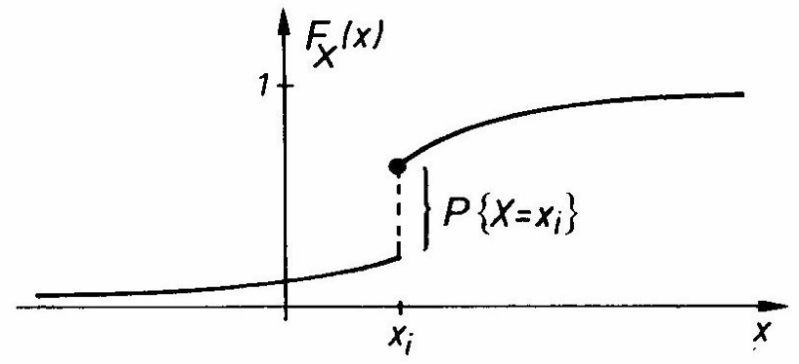
1. Calcoliamo :

Applico la proprietà di

**VARIABILI ALEATORIE MISTE**

Una variabile aleatoria si dice **mista** se è in parte discreta e in parte continua.

Sia una variabile aleatoria mista che assume come valori discreti { }. sarà una funzione non costante a tratti, dove ogni salto sarà in corrispondenza di ciascun   
e sarà alto :

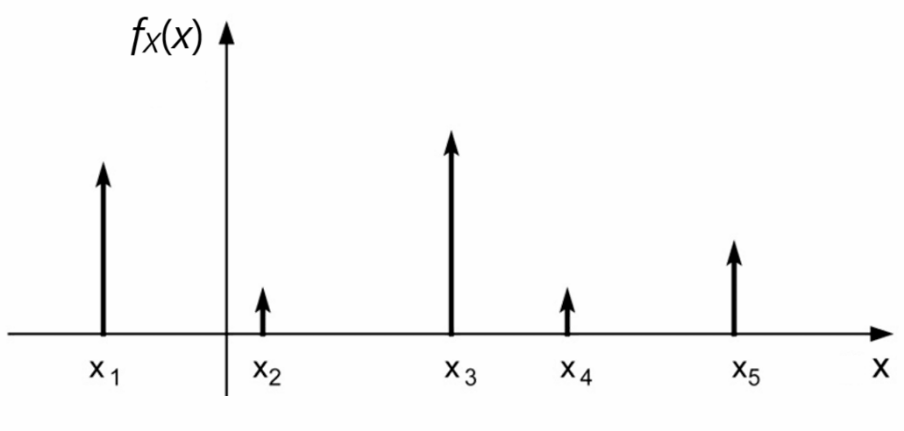


**DENSITA’ DI PROBABILITA’ PER VARIABILI ALEATORIE DISCRETE E MISTE**

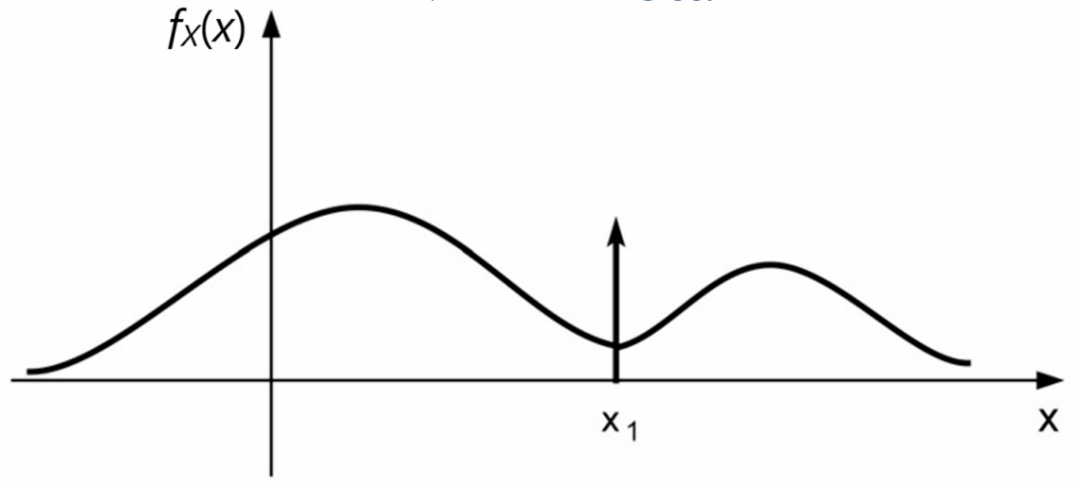
Sia una variabile aleatoria discreta che assume solo i valori discreti { }.   
Abbiamo visto che:

Per cui, calcolando :

, dunque, può assumere un valore diverso da 0 solo in ciascun punto ,   
dove varrà :



Sia ora una variabile aleatoria mista che assume come valori discreti { }.   
 sarà una funzione che in corrispondenza di ciascun punto assumerà come valore :



**TRASFORMAZIONI DI UNA VARIABILE ALEATORIA**

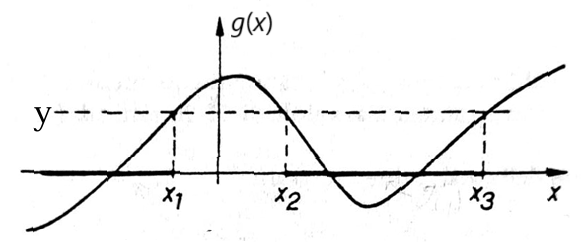
Data una variabile aleatoria , sia una variabile aleatoria ottenuta trasformando   
attraverso la funzione . Vediamo alcuni metodi per ricavare una descrizione statistica di   
nota la descrizione statistica di .

**METODO DELLA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE**

Data una variabile aleatoria , sia una variabile aleatoria ottenuta trasformando   
attraverso la funzione .

Consideriamo . Per definizione:

Chiamando , si può osservare che:



Applicando la proprietà di :

Si ottiene così:



Se è una variabile aleatoria continua e è una variabile aleatoria discreta che assume solo   
i valori discreti , chiamando , facendo un ragionamento simile si ottiene:



Se e sono entrambe variabili aleatorie discrete che assumono rispettivamente solo i valori discreti   
 e , chiamando , facendo   
un ragionamento simile si ottiene:



Ricorda la parte evidenziata, che diventerà la probabilità dell’unione   
di eventi disgiunti, e quindi somma di probabilità. Queste probabilità poi   
puoi calcolarle:

* Se è continua:
  + Attraverso , sfruttando la definizione   
    o la proprietà ;
  + Attraverso , sfruttando la proprietà
* Se è discreta, attraverso , sfruttando la definizione

*Es.* sia una variabile aleatoria continua, e sia la variabile aleatoria continua   
ottenuta trasformando attraverso la seguente funzione :

Calcolare .

sarà una variabile aleatoria mista che assumerà come valori discreti .

Calcoliamo . Usiamo il metodo della funzione di distribuzione, e aiutandoci col grafico di , vediamo come varia al variare di :

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, testo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Applico la definizione

* :
* :
* :

*Es.* sia una variabile aleatoria discreta che assume solo i valori discreti   
con la stessa probabilità, e sia . Calcolare la probabilità che .

è una variabile aleatoria discreta che assume solo i valori discreti ,   
dunque sarà una variabile aleatoria discreta che assumerà solo i valori discreti .

assume i 3 valori discreti con la stessa probabilità, dunque:

Ci interessa calcolare . Usiamo il metodo della funzione di distribuzione,   
e poiché e sono entrambe variabili aleatorie discrete:

*Es.* sia una variabile aleatoria continua, e sia la variabile aleatoria   
ottenuta trasformando attraverso la seguente funzione :

Calcolare .

sarà una variabile aleatoria discreta che assumerà solo i valori .

Calcoliamo . Usiamo il metodo della funzione di distribuzione, e poiché è una variabile   
aleatoria continua e è una variabile aleatoria discreta:

Per la proprietà di ,

è una v.a. continua,   
dunque

Applico la proprietà

o la definizione

è una v.a. continua,   
dunque

**TEOREMA FONDAMENTALE PER LA TRASFORMAZIONE DI UNA   
VARIABILE ALEATORIA**

Data una variabile aleatoria continua , sia una variabile aleatoria ottenuta trasformando attraverso la funzione . Chiamando , allora:

Data dunque una variabile aleatoria ottenuta trasformando attraverso   
la funzione :

* Usa il metodo della funzione di distribuzione se devi calcolare o ;
* Usa il teorema fondamentale per la trasformazione di una variabile aleatoria se devi calcolare .

*Es.* si consideri la variabile aleatoria uniformemente distribuita nell’intervallo   
Si consideri inoltre la variabile aleatoria .

1. Calcolare e disegnare ;
2. Calcolare e disegnare .
3. è una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell’intervallo , per cui:

Immagine che contiene linea, Diagramma, numero, Carattere

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

1. è una variabile aleatoria continua, e è una variabile aleatoria ottenuta trasformando attraverso la funzione , per cui posso applicare il teorema fondamentale   
   per la trasformazione di una variabile aleatoria:

Calcoliamo innanzitutto :

A questo punto, aiutandoci col grafico di , vediamo come varia   
al variare di :

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, numero

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Vediamo come varia il valore di e al variare di :

* + - :

Abbiamo quindi:

* + - :

Abbiamo quindi:

* + - :

Abbiamo quindi:

, dunque, sarà fatta in questo modo:

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, Parallelo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

*Es.* si consideri la variabile aleatoria uniformemente distribuita nell’intervallo   
Si consideri inoltre la variabile aleatoria .

1. Calcolare ;
2. Calcolare e disegnare .
3. è una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell’intervallo , per cui:
4. è una variabile aleatoria continua, e è una variabile aleatoria   
   ottenuta trasformando attraverso la funzione , per cui posso applicare   
   il teorema fondamentale per la trasformazione di una variabile aleatoria:

Calcoliamo innanzitutto :

A questo punto, aiutandoci col grafico di , vediamo come varia   
al variare di :

* + :

Immagine che contiene linea, Diagramma, testo, diagramma

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Analizziamo :

* + - ;

Abbiamo quindi:

* + :

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, testo

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Analizziamo :

* + - ;

Abbiamo quindi:

, dunque, sarà fatta in questo modo:

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma, numero

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

**INDICI CARATTERISTICI DI UNA DISTRIBUZIONE**

Gli **indici caratteristici di una distribuzione** sono dei valori che forniscono informazioni parziali   
sulla funzione di distribuzione di probabilità, di massa di probabilità o di densità di probabilità   
di una variabile aleatoria, utili nel caso in cui queste funzioni non fossero note.

Data una variabile aleatoria , gli indici caratteristici che analizzeremo sono i seguenti:

* **Valore medio (o )**

Se è una variabile aleatoria discreta che assume solo i valori discreti ,   
vale anche:

è un *indice di posizione*, e cioè fornisce la posizione attorno al quale si addensano   
i valori di . E’ compreso tra il più piccolo e il più grande valore assunto da ,   
e può non coincidere con alcuno dei valori assunti da .

Valgono le seguenti proprietà:

* + Se è pari attorno ad , allora il valore medio di è :
  + Il valore medio è un operatore lineare, e cioè, date due variabili aleatorie e :

* + Il valore medio di una costante è la costante stessa:

Vale inoltre il cosiddetto teorema dell’aspettazione: data una variabile aleatoria , sia   
la variabile aleatoria ottenuta trasformando attraverso la funzione . Allora:

Se e sono entrambe discrete, con che assume solo i valori discreti ,   
vale anche:

* **Valore quadratico medio**

è una v.a. ottenuta trasformando la v.a. attraverso la funzione .

Applico allora il th. dell’aspettazione.

Se è una variabile aleatoria discreta che assume solo i valori discreti ,   
vale anche:

è una v.a. discreta ottenuta trasformando la v.a. discreta attraverso la funzione .

Applico allora il th. dell’aspettazione per v.a. discrete.

* **Varianza (o )**

è una v.a. ottenuta trasformando la v.a. attraverso la funzione .

Applico allora il th. dell’aspettazione.

Se è una variabile aleatoria discreta che assume solo i valori discreti ,   
vale anche:

è una v.a. discreta ottenuta trasformando la v.a. discreta attraverso la funzione .

Applico allora il th. dell’aspettazione per v.a. discrete

è un *indice di dispersione*, e cioè fornisce una misura dello scostamento dei valori di   
da . Al crescere di , dunque, sarà più probabile che assuma valori lontani da ,   
e quindi risulterà sempre meno appuntita attorno a .

Immagine che contiene linea, diagramma, Diagramma, Carattere

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

* **Deviazione standard**

Se è una variabile aleatoria discreta che assume solo i valori discreti ,   
vale anche:

Come , anche è un indice di dispersione.

Valgono le seguenti proprietà:

* , ,
* Se è una grandezza fisica dimensionale, e hanno le stesse dimensioni di ;

*Es*. si consideri la variabile aleatoria uniformemente distribuita nell’intervallo   
calcolare il valore medio di .

è una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell’intervallo , per cui:

Immagine che contiene linea, Diagramma, diagramma

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

Calcoliamo

Il valore medio di una costante rispetto al risultato è la costante stessa

Applico la linearità dell’operatore valore medio

Calcoliamo :

per e .

L’integrale dunque è diverso da 0   
solo per , dove

Calcoliamo ora . Come si può osservare dal grafico, è pari rispetto a ,   
per cui, per la proprietà del valore medio:

Sostituendo allora in i valori calcolati:

In alternativa, è una variabile aleatoria ottenuta trasformando attraverso la funzione , per cui posso calcolare applicando il teorema dell’aspettazione:

per e .

L’integrale dunque è diverso da 0   
solo per , dove

Per le variabili aleatorie notevoli, gli indici caratteristici hanno i seguenti valori:

* **Variabile aleatoria di Poisson 𝑋 ∈**
* **Variabile aleatoria uniforme 𝑋 ∈**
* **Variabile aleatoria esponenziale 𝑋 ∈**
* **Variabile aleatoria Gaussiana 𝑋 ∈**

**TEOREMA DI TCHEBYCHEFF** *08-04-25*

Data una variabile aleatoria con finita, allora:



Il teorema, dunque, stabilisce un limite superiore alla probabilità che assuma valori lontani da   
più di volte .

Applicando la proprietà 1 al teorema di Tchebycheff si ottiene un limite inferiore alla probabilità   
che assuma valori lontani da meno di volte :



Es. si consideri la variabile aleatoria Gaussiana di parametri e .

1. Si determini un limite superiore alla probabilità che non appartenga all’intervallo   
   ;
2. Si calcoli la probabilità che non appartenga all’intervallo .

è una variabile aleatoria Gaussiana di parametri e , per cui:

1. Ci interessa calcolare un limite superiore a :

Applico il teorema di Tchebycheff

e

1. Ci interessa calcolare :

è una variabile aleatoria Gaussiana di parametri e , dunque:

Guardando i valori tabulati di ,

Applico la proprietà

e sono eventi disgiunti, per cui applico l’assioma 3

**VARIABILI ALEATORIE CONDIZIONATE**

Data una variabile aleatoria e un evento , chiamiamo **funzione di distribuzione di probabilità della variabile aleatoria**  **condizionata all’evento**  la funzione:

presenta le stesse proprietà delle funzioni di distribuzione di probabilità non condizionate:

1. è monotona non decrescente, dunque:

1. è continua da destra, per cui, se ha un salto nel punto , il suo valore in coincide con il suo limite destro in :

Chiamiamo **funzione** **di densità di probabilità della variabile aleatoria**    
**condizionata all’evento**  la funzione:

presenta le stesse proprietà delle funzioni di densità di probabilità non condizionate:

Le variabili aleatorie esponenziali godono della cosiddetta proprietà di assenza di memoria,   
e cioè, se è una variabile aleatoria esponenziale, allora:

**SISTEMA DI 2 VARIABILI ALEATORIE**

Date due variabili aleatorie e definite per uno stesso esperimento, queste costituiscono   
un **sistema di 2 variabili aleatorie**  che associa a ciascun risultato dell’esperimento   
uno e un solo punto a coordinate reali nel piano .

Chiamiamo **funzione** **di distribuzione di probabilità congiunta di** la funzione:

Alcune proprietà di sono le seguenti:

1. è monotona non decrescente in ciascuna delle due variabili, dunque:

Data , è possibile ricavare la funzione di distribuzione di probabilità di ciascuna   
delle due variabili aleatorie di attraverso le cosiddette regole marginali:

Chiamiamo **funzione** **di densità di probabilità congiunta di** la funzione:

Alcune proprietà di sono le seguenti:

Data , è possibile ricavare la funzione di densità di probabilità di ciascuna   
delle due variabili aleatorie di attraverso le cosiddette regole marginali:



Dato un sistema di 2 variabili aleatorie , e si dicono **indipendenti**   
se gli eventi e sono indipendenti. In questo caso, si può verificare che:

**INDICI CARATTERISTICI DI UN SISTEMA DI 2 VARIABILI ALEATORIE**

Gli **indici caratteristici di un sistema di 2 variabili aleatorie** sono dei valori che forniscono informazioni parziali sulla funzione di distribuzione di probabilità o di densità di probabilità congiunta del sistema, utili nel caso in cui queste funzioni non fossero note.

Innanzitutto, è possibile generalizzare il teorema dell’aspettazione: dato un sistema   
di 2 variabili aleatorie , sia la variabile aleatoria ottenuta trasformando   
attraverso la funzione . Allora:

A questo punto, gli indici caratteristici che analizzeremo sono i seguenti:

* **Correlazione**

è una v.a. ottenuta trasformando ( attraverso la funzione .

Applico allora il th. dell’aspettazione.

Se , e si dicono *ortogonali*.

* **Covarianza**

è una v.a. ottenuta trasformando ( attraverso la funzione .

Applico allora il th. dell’aspettazione.

è un *indice di variabilità congiunta*, e cioè misura la tendenza di variazione congiunta   
di e :

* + Se è grande in modulo e positiva, allora e tendono a discostarsi   
    dal proprio valore medio nella stessa direzione, e cioè e   
    tendono ad avere lo stesso segno;
  + Se è grande in modulo e negativa, allora e tendono a discostarsi   
    dal proprio valore medio in direzione opposta, e cioè e   
    tendono ad avere segno opposto.

Se , e si dicono *incorrelate*.

* **Coefficiente di correlazione (o covarianza normalizzata)**

Valgono le seguenti proprietà:

* + se e solo se ;
  + se e solo se e sono legate da una relazione del tipo ,   
    e in particolare:
    - se e solo se con ;
    - se e solo se con .

Come , anche è *un indice di variabilità congiunta*, e come si è visto dalle proprietà,   
è in particolare un indice della dipendenza lineare tra e .

Valgono le seguenti proprietà:

* ;

Si può verificare che se e sono indipendenti, allora sono anche incorrelate, dunque .

*Es.* data la variabile aleatoria uniformemente distribuita nell’intervallo ,   
si considerino le variabili aleatorie e .

Calcolare:

1. ;
2. ;
3. ;
4. .

è una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell’intervallo , per cui:

1. Calcoliamo :

ha periodo tale che .

Si tratta dunque di un integrale di una funzione trigonometrica  
su un intervallo di integrazione di ampiezza pari a un multiplo intero   
del periodo della funzione, per cui questo integrale fa 0.

per e . L’integrale dunque è diverso da 0   
solo per , dove

è una v.a. ottenuta trasformando la v.a. attraverso la funzione .

Applico allora il th. dell’aspettazione.

1. Calcoliamo :

ha periodo tale che .

Si tratta dunque di un integrale di una funzione trigonometrica  
su un intervallo di integrazione di ampiezza pari a un multiplo intero   
del periodo della funzione, per cui questo integrale fa 0.

per e . L’integrale dunque è diverso da 0   
solo per , dove

è una v.a. ottenuta trasformando la v.a. attraverso la funzione .

Applico allora il th. dell’aspettazione.

1. Calcoliamo :

ha periodo tale che .

Si tratta dunque di un integrale di una funzione trigonometrica  
su un intervallo di integrazione di ampiezza pari a un multiplo intero   
del periodo della funzione, per cui questo integrale fa 0.

Applico la formula trigonometrica

per e . L’integrale dunque è diverso da 0   
solo per , dove

è una v.a. ottenuta trasformando la v.a. attraverso la funzione .

Applico allora il th. dell’aspettazione.

1. Calcoliamo :

Dalle proprietà degli indici caratteristici di un sistema di 2 v.a.:

Un sistema di 2 variabili aleatorie notevole è il **sistema di 2 variabili congiuntamente Gaussiane**,   
e cioè un sistema di 2 variabili aleatorie con e.   
In questo caso, si può verificare che e sono incorrelate se e solo se sono indipendenti.

**TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE**

Dato un sistema di variabili aleatorie caratterizzate dalla stessa funzione   
di densità di probabilità , stesso valore medio e stessa varianza ,   
si consideri la variabile aleatoria Allora:

*Es*. si hanno a disposizione dei resistori la cui resistenza può essere descritta   
da una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell’intervallo .

Se si collegano in serie di tali resistori scelti a caso, qual è la probabilità che la resistenza complessiva superi ?

Dati 100 resistori in serie, indicando con la resistenza dell’-esimo resistore,   
la resistenza complessiva sarà la somma delle singole resistenze:

, dunque, sarà un sistema di 100 variabili aleatorie   
caratterizzate dalla stessa funzione di densità di probabilità , stesso valore medio   
e stessa varianza , per cui, per il teorema del limite centrale:

è una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell’intervallo , dunque:

Abbiamo quindi:

Ci interessa calcolare :

è approssimabile a una variabile Gaussiana di parametri e , dunque

Guardando i valori tabulati di ,

**PROCESSI ALEATORI** *10-04-25*

Dato un esperimento caratterizzato da uno spazio campione , una classe di eventi   
e una funzione di probabilità , un **processo aleatorio** è una corrispondenza   
che associa a ciascun risultato dell’esperimento una funzione reale della variabile (tipicamente, il tempo), detta *realizzazione* del processo aleatorio.

Considerando un certo istante , sarà una corrispondenza che associa a ciascun risultato dell’esperimento uno e un solo numero reale, e quindi sarà per definizione una variabile aleatoria.  
Diremo allora che è la variabile aleatoria *estratta* da all’istante .

Un processo aleatorio si dice **parametrico** se può essere specificato attraverso la forma   
delle sue realizzazioni, forma che dipende parametricamente da un certo numero di variabili aleatorie.

*Es.*

con

Immagine che contiene linea, diagramma, testo, Diagramma

Il contenuto generato dall'IA potrebbe non essere corretto.

**DESCRIZIONE STATISTICA DEL 1° ORDINE DI UN PROCESSO ALEATORIO**

Dato un processo aleatorio , sia la variabile aleatoria estratta da all’istante .

Chiamiamo **funzione di distribuzione del primo ordine di** la funzione di distribuzione   
di probabilità di :

Analogamente, chiamiamo **funzione di densità di probabilità del primo ordine di**la funzione di densità di probabilità di :

Chiamiamo **indici caratteristici del primo ordine di** gli indici caratteristici di :

* **Funzione valore medio**

E’ il valore medio di :

* **Funzione potenza media**

E’ il valore quadratico medio di :

* **Funzione varianza**

E’ la varianza di :

Le proprietà di queste funzioni e di questi indici sono le stesse delle funzioni e degli indici   
con cui sono stati definiti. Per gli indici, in particolare:

* ,
* Se è una grandezza fisica dimensionale, ha le stesse dimensioni di ;

*Es*. dato il processo aleatorio parametrico:

Calcolare:

1. ;
2. ;
3. ;
4. .

è una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell’intervallo , per cui:

1. Calcoliamo . Vediamo come varia al variare di :

per

per

* + :

, dunque, è una variabile discreta che assume solo il valore discreto ,   
quindi . Ricordando allora come è fatta la densità di probabilità   
di una variabile aleatoria discreta che assume solo i valori discreti :

* + :

, dunque, è uguale alla variabile aleatoria , per cui ha la stessa densità   
di probabilità di tale variabile:

1. Calcoliamo :

Applico la linearità dell’operatore valore medio   
( è costante rispetto al risultato dell’esperimento)

è una v.a. uniformemente distribuita nell’intervallo , dunque

1. Calcoliamo :

, e dalle proprietà degli indici caratteristici di una v.a.:

è una v.a. uniformemente distribuita nell’intervallo , dunque:



Applico la linearità dell’operatore valore medio   
( è costante rispetto al risultato dell’esperimento)

1. Calcoliamo :

Dalle proprietà degli indici caratteristici del primo ordine di un processo aleatorio:

**DESCRIZIONE STATISTICA DEL 2° ORDINE DI UN PROCESSO ALEATORIO**

Dato un processo aleatorio , sia il sistema di 2 variabili aleatorie e   
estratte da rispettivamente agli istanti e .

Chiamiamo **funzione di distribuzione del secondo ordine di**la funzione di distribuzione di probabilità congiunta di :

Chiamiamo **funzione di densità di probabilità del secondo ordine di**la funzione di densità di probabilità congiunta di :

Chiamiamo **indici caratteristici del secondo ordine di** gli indici caratteristici di :

* **Funzione di autocorrelazione**

E’ la correlazione di :

**Funzione di autocovarianza**

E’ la covarianza di :

Le proprietà di queste funzioni e di questi indici sono le stesse delle funzioni e degli indici   
con cui sono stati definiti. Per gli indici, in particolare:

Valgono inoltre le seguenti relazioni:

**STAZIONARIETA’ DI UN PROCESSO ALEATORIO**

**STAZIONARIETA’ DI ORDINE 1**

Un processo aleatorio si dice **stazionario di ordine 1** se:

Questo significa che è indipendente da :

In questo caso, allora, si può verificare che gli indici caratteristici del primo ordine di   
saranno costanti:

**STAZIONARIETA’ DI ORDINE 2**

Un processo aleatorio si dice **stazionario di ordine 2** se:

Questo significa che dipende non da e separatamente, ma solo da :

In questo caso, allora, si può verificare che:

* sarà anche stazionario di ordine 1.

In particolare, dunque, gli indici caratteristici del primo ordine di saranno costanti:

* Gli indici caratteristici del secondo ordine di dipenderanno solo da :

**STAZIONARIETA’ IN SENSO LATO**

Un processo aleatorio si dice **stazionario in senso lato** se è costante   
e dipende solo da :

In questo caso, allora, si può verificare che:

* Anche i restanti indici caratteristici del primo ordine di saranno costanti:
* Anche i restanti indici caratteristici del secondo ordine di dipenderanno solo da :

Un processo aleatorio stazionario di ordine 2, essendo caratterizzato da indici del primo ordine costanti e indici del secondo ordine dipendenti solo da , sarà anche stazionario in senso lato,   
mentre non è detto il viceversa.

Dato un processo aleatorio stazionario in senso lato o di ordine 2, la relazione tra gli indici   
del secondo ordine diventa la seguente:

*Es*. dato il processo aleatorio parametrico:

Calcolare:

1. ;
2. .

è una v.a. uniformemente distribuita nell’intervallo , per cui:

1. Calcoliamo :

Applico la formula trigonometrica

per e . L’integrale dunque è diverso da 0   
solo per , dove

Sostituisco :

* Calcolo il differenziale:

* Calcolo gli estremi di integrazione:
  + Per ;
  + Per

è una v.a. ottenuta trasformando   
la v.a. attraverso la funzione .

Applico allora il th. dell’aspettazione.

non è costante, dunque sicuramente non sarà né stazionario di ordine 1,   
né stazionario in senso lato, in quanto, in entrambi i casi, dovrebbe essere costante.

Non essendo stazionario di ordine 1, sicuramente non sarà stazionario di ordine 2,   
in quanto, se lo fosse, dovrebbe essere anche stazionario di ordine 1.

1. Calcoliamo :

Analizzando il primo integrale, è costante   
rispetto alla variabile , per cui posso applicare la linearità dell’integrale.

Analizzando il secondo integrale,   
nella variabile ha periodo tale che .

Si tratta dunque di un integrale di una funzione trigonometrica  
su un intervallo di integrazione di ampiezza pari a un multiplo intero   
del periodo della funzione, per cui questo integrale fa 0.

Applico la formula trigonometrica

per e . L’integrale dunque è diverso da 0   
solo per , dove

è una v.a ottenuta trasformando la v.a. attraverso la funzione   
.

Applico allora il th. dell’aspettazione.

*Es*. dato il processo aleatorio parametrico:

Calcolare:

1. ;
2. .

è una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell’intervallo , per cui:

1. Calcoliamo :

nella variabile ha periodo tale che   
. Si tratta dunque di un integrale   
di una funzione trigonometrica su un intervallo di integrazione   
di ampiezza pari a un multiplo intero del periodo della funzione,   
per cui questo integrale fa 0.

per e . L’integrale dunque è diverso da 0   
solo per , dove

è una v.a. ottenuta trasformando   
la v.a. attraverso la funzione .

Applico allora il th. dell’aspettazione.

1. Calcoliamo :

per e . L’integrale dunque è diverso da 0   
solo per , dove

Analizzando il primo integrale, è costante   
rispetto alla variabile , per cui posso applicare la linearità dell’integrale.

Analizzando il secondo integrale,   
nella variabile ha periodo tale che .

Si tratta dunque di un integrale di una funzione trigonometrica  
su un intervallo di integrazione di ampiezza pari a un multiplo intero   
del periodo della funzione, per cui questo integrale fa 0.

Applico la formula trigonometrica

è una v.a. ottenuta trasformando la v.a. attraverso la funzione   
.

Applico allora il th. dell’aspettazione.

è costante e dipende solo da , per cui è stazionario   
in senso lato.

**PROPRIETA’ DELLA FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE PER UN PROCESSO ALEATORIO STAZIONARIO IN SENSO LATO** *15-04-25*

Dato un processo aleatorio stazionario in senso lato, presenta le seguenti proprietà:

1. è pari, e cioè:
2. ;
3. ;
4. Se è periodico con periodo , allora anche sarà periodica con periodo :
5. Se non è periodica, allora:

**PROPRIETA’ DELLA FUNZIONE DI AUTOCOVARIANZA PER UN PROCESSO ALEATORIO STAZIONARIO IN SENSO LATO**

Dato un processo aleatorio stazionario in senso lato, chiamiamo **tempo di correlazione**    
il minimo valore positivo di tale per cui , e cioè tale per cui 2 variabili aleatorie   
estratte da sono incorrelate.

**FILTRAGGIO DI UN PROCESSO ALEATORIO ATTRAVERSO   
UN SISTEMA LTI**

Dato un sistema LTI caratterizzato da risposta impulsiva e risposta in frequenza ,   
dandogli in ingresso un processo aleatorio si otterrà in uscita un nuovo processo aleatorio .   
I due processi aleatori sono legati tra loro attraverso la seguente relazione:

Gli indici caratteristici di sono legati a quelli di in questo modo:

* ;

Se è stazionario in senso lato, anche sarà stazionario in senso lato,   
e le relazioni tra gli indici caratteristici diventano:

* ;

Dove è detta funzione di autocorrelazione della risposta impulsiva del sistema.

**DENSITA’ SPETTRALE DI POTENZA**

Dato un processo aleatorio stazionario in senso lato, chiamiamo **densità spettrale di potenza di** la trasformata continua di Fourier di :

Si può verificare

Alcune proprietà di sono le seguenti:

è una funzione pari,   
e l’integrale di una funzione pari   
su un intervallo di integrazione simmetrico rispetto all’origine  
è uguale a 2 volte l’integrale su metà intervallo di integrazione

1. è una funzione pari, e cioè:

*Es*. dato il processo aleatorio parametrico stazionario in senso lato:

Calcolare:

1. ;
2. .

è una variabile aleatoria uniformemente distribuita nell’intervallo , per cui:

1. Calcoliamo . Per definizione, questa è la trasformata continua di Fourier di ,   
   e [abbiamo visto in precedenza](#processo_aleatorio_stazionario_lato) che:

Abbiamo quindi:

1. Calcoliamo . è un processo aleatorio stazionario in senso lato, per cui,   
   applicando la proprietà di :

In alternativa, è possibile applicare la proprietà di :

Dato un sistema LTI caratterizzato da risposta impulsiva e risposta in frequenza ,   
abbiamo visto che dandogli in ingresso un processo aleatorio stazionario in senso lato   
si ottiene in uscita un nuovo processo aleatorio , anch’esso stazionario in senso lato.   
 è legata a attraverso la seguente relazione:

*ES*

**PROCESSO ALEATORIO GAUSSIANO**

Un processo aleatorio si dice **Gaussiano** se qualunque variabile aleatoria estratta da   
è Gaussiana.

Dato un sistema LTI caratterizzato da risposta impulsiva e risposta in frequenza ,   
dandogli in ingresso un processo aleatorio si otterrà in uscita un nuovo processo aleatorio .   
Si può verificare che seè Gaussiano, anche è Gaussiano.

Un processo aleatorio Gaussiano stazionario in senso lato si dice **bianco**   
se ha la densità spettrale di potenza costante:

Si può verificare che:

* ;